

Determinanty, aneb jak maticím přidělit užitečná čísla

připravili Ivana a Petr Vojčákovi

V druhém kole letošního KOSA navážeme na kolo první a budeme pokračovat v práci s maticemi. Ukážeme si, jakým způsobem lze každé čtvercové matici \mathbf{A} přiřadit jisté reálné číslo, které označujeme $\det \mathbf{A}$ a nazýváme determinant matice \mathbf{A} , a seznámíme se s několika praktickými aplikacemi determinantů při řešení matematických úloh.

Determinantem čtvercové matice řádu n nazýváme součet všech součinů n prvků této matice takových, že v žádném z uvedených součinů se nevyskytují dva prvky z téhož řádku ani z téhož sloupce. Každý z těchto součinů přitom ve výsledném součtu vystupuje se znaménkem $+$ nebo $-$ podle jistých pravidel, které si předvedeme pro čtvercové matice 1., 2. a 3. řádu:

• Matice 1. řádu

Pokud $\mathbf{A} = (a_{11})$ je matice 1×1 , pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11}.$$

Determinant matice 1. řádu je tedy roven hodnotě jediného prvku této matice.

• Matice 2. řádu

Pokud $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je matice 2×2 , pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Determinant matice 2. řádu tedy vytvoříme tak, že od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin zbývajících dvou prvků. Jeho absolutní hodnotu lze interpretovat jako obsah rovnoběžníku s vrcholy v bodech $(0, 0)$, $\mathbf{u} = (a_{11}, a_{21})$, $\mathbf{v} = (a_{12}, a_{22})$ a $(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$. Znaménko determinantu určuje vzájemnou orientaci vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v} . $\det \mathbf{A}$ je kladný, pokud úhel mezi vektory \mathbf{u} a \mathbf{v} měřený v kladném směru (tedy proti směru hodinových ručiček) je z intervalu $(0, \pi)$, a záporný, pokud je tento úhel z intervalu $(\pi, 2\pi)$.

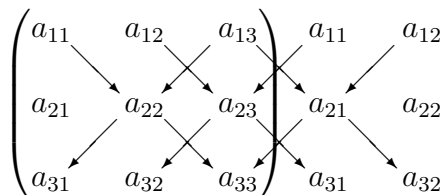
• **Matice 3. řádu**

Pokud $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ je matice 3×3 , pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Podobný geometrický význam determinantu jako u matic 2. řádu najdeme i pro matice řádu 3. Řádkové vektory $\mathbf{u} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\mathbf{v} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\mathbf{w} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ určují v třídímním prostoru rovnoběžnostěn, jehož objem je roven $|\det \mathbf{A}|$. Pokud je $\det \mathbf{A}$ kladný, pak je posloupnost vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} pravotočivá, a levotočivá, pokud je $\det \mathbf{A}$ záporný.

Výpočet determinantu matice 3. řádu si lze snadněji zapamatovat pomocí tzv. **Sarrusova pravidla**, které je vyjádřeno následujícím schématem:



Prvky ležící na úhlopříčkách spolu vynásobíme, přičemž součinům směřujícím zleva doprava přiřadíme znaménko $+$ a těm, které směřují zprava doleva, přiřadíme znaménko $-$. Tím dostaneme součiny $+a_{11}a_{22}a_{33}$, $+a_{12}a_{23}a_{31}$, $+a_{13}a_{21}a_{32}$, $-a_{13}a_{22}a_{31}$, $-a_{11}a_{23}a_{32}$, $-a_{12}a_{21}a_{33}$ a jejich sečtením získáme hodnotu determinantu matice \mathbf{A} .

Důležité upozornění: Sarrusovo pravidlo platí výlučně pro čtvercové matice 3. řádu!!!

Samozřejmě determinanty lze počítat i u čtvercových matic řádu vyššího než 3, ovšem pro jejich výpočet již neexistuje žádné jednoduché názorné pravidlo a v rámci tohoto textu se jejich výpočtem nebudeme zabývat.

Některé základní vlastnosti determinantů:

- je-li některý řádek (sloupec) matice \mathbf{A} nulový, pak $\det \mathbf{A} = 0$;
- jsou-li některé dva řádky (sloupce) matice \mathbf{A} stejné, pak $\det \mathbf{A} = 0$;
- jsou-li řádky (sloupce) matice \mathbf{A} lineárně závislé, pak $\det \mathbf{A} = 0$;
- prohodíme-li v matici \mathbf{A} libovolné dva řádky (sloupce), $\det \mathbf{A}$ bude mít opačné znaménko, přičemž jeho absolutní hodnota se nezmění.

UKÁZKOVÝ PŘÍKLAD

Proveďte diskuzi řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} px + y - z &= 1 \\ x + py - z &= 1 \\ -x + y + pz &= 1, \end{aligned}$$

kde x, y, z jsou neznámé a p reálný parametr.

ŘEŠENÍ

Část dané úlohy vyřešíme pomocí tzv. **Cramerova pravidla**, které k řešení soustavy lineárních rovnic využívá právě determinantů. Vytvoříme si následující matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ -1 & 1 & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & p & -1 \\ 1 & 1 & p \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

příčemž \mathbf{A} je matice soustavy, matice \mathbf{A}_x vznikla z matice soustavy tak, že jsme první sloupec nahradili sloupcem pravých stran, v matici \mathbf{A}_y jsme takto nahradili druhý sloupec a v matici \mathbf{A}_z třetí. Dále si pomocí Sarrusova pravidla spočítáme determinanty těchto matic:

$$\det \mathbf{A} = p^3 + 1 - 1 - p + p - p = p(p^2 - 1),$$

$$\det \mathbf{A}_x = p^2 - 1 - 1 + p + 1 - p = p^2 - 1,$$

$$\det \mathbf{A}_y = p^2 + 1 - 1 - 1 + p - p = p^2 - 1,$$

$$\det \mathbf{A}_z = p^2 - 1 + 1 + p - p - 1 = p^2 - 1.$$

Cramerovo pravidlo říká následující: je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$, tj. v tomto případě pokud $p \notin \{-1, 0, 1\}$, pak má soustava právě jedno řešení a pro neznámé x, y, z platí:

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_x}{\det \mathbf{A}} = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 - 1)} = \frac{1}{p},$$

$$y = \frac{\det \mathbf{A}_y}{\det \mathbf{A}} = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 - 1)} = \frac{1}{p},$$

$$z = \frac{\det \mathbf{A}_z}{\det \mathbf{A}} = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 - 1)} = \frac{1}{p}.$$

Zbývá nám tudíž rozřešit případy, kdy $p \in \{-1, 0, 1\}$.

- Nechť tedy nejprve $p = -1$. Pak zadaná soustava má tvar

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 1 \\ x - y - z &= 1 \\ -x + y - z &= 1, \end{aligned}$$

tedy první a třetí rovnice jsou v tomto případě stejné. Sečteme-li první dvě rovnice, dostaneme:

$$-2z = 2, \quad \text{tedy } z = -1.$$

Po dosazení tohoto výsledku do první rovnice dále dostaneme:

$$-x + y = 0, \quad \text{tedy } x = y.$$

- Nechť dále $p = 0$. Pak soustava má tvar

$$\begin{aligned} y - z &= 1 \\ x - z &= 1 \\ -x + y &= 1. \end{aligned}$$

Jestliže od první rovnice odečteme druhou, pak společně s třetí rovnicí dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ -x + y &= 1, \end{aligned}$$

která očividně nemá žádné řešení.

- Nechť nakonec $p = 1$. Pak zadaná soustava má tvar

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \\ -x + y + z &= 1, \end{aligned}$$

tedy první a druhá rovnice jsou v tomto případě stejné. Sečteme-li první a třetí rovnici, dostaneme:

$$2y = 2, \quad \text{tedy } y = 1.$$

Po dosazení tohoto výsledku do první rovnice dále dostaneme:

$$x - z = 0, \quad \text{tedy } x = z.$$

Závěr: Pokud $p \notin \{-1, 0, 1\}$, má soustava jediné řešení

$$x = y = z = \frac{1}{p}.$$

Je-li $p = -1$, má soustava nekonečně mnoho řešení $x = y = t$, $z = -1$, kde t je libovolné reálné číslo.

Je-li $p = 1$, má soustava opět nekonečně mnoho řešení $x = z = t$, $y = 1$, kde t je libovolné reálné číslo.

Jestliže $p = 0$, pak daná soustava rovnic nemá žádné řešení.